INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE
ET DES ÉTUDES ÉCONOMIQUES

CONCOURS POUR L'ADMISSION D'ÉLÈVES TITULAIRES STATISTICIENS ÉCONOMISTES
À L'ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ADMINISTRATION ÉCONOMIQUE

Juin 1986. — Option MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

Notations :

Dans tout le problème on considère :

$I = [x_0, x_1]$ un intervalle de $\mathbb{R}$,

$E = \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$,

$C = \{ v \in E / \forall (x, x') \in I^2, x \leqslant x' \Rightarrow v(x) \leqslant v(x') \}$

l'ensemble des fonctions continues croissantes de I dans $\mathbb{R}$,

et $F : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui est, de plus, strictement concave par rapport à sa deuxième variable, c'est-à-dire telle que :

$$(A) \quad \begin{cases} \forall x \in I \quad \forall \lambda \in]0,1[\quad \forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \\ y_1 \neq y_2 \Rightarrow F(x, \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2) > \lambda F(x, y_1) + (1-\lambda) F(x, y_2). \end{cases}$$

On définit alors une application de E dans $\mathbb{R}$ en posant pour tout $v \in E$:

$$(1) \qquad \Phi(v) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, v(x))\, dx .$$

Le but du problème est de montrer que, sous certaines conditions, l'application Φ admet un maximum unique sur l'ensemble C et de caractériser ce maximum.

I

On pose, pour tout $v \in E$: (2) $\qquad \| v \| = \sup_{x \in I} | v(x) |$

1° Montrer que :

a. L'application $v \to \| v \|$ est une norme sur E ;

b. E, muni de cette norme, est un espace de BANACH ;

c. L'application Φ est définie et continue sur E pour la norme définie par (2) ;

d. L'application Φ est strictement concave, c'est-à-dire :

$\forall \lambda \in]0,1[\quad \forall (v_1, v_2) \in E^2$

$v_1 \neq v_2 \Rightarrow \Phi(\lambda v_1 + (1-\lambda) v_2) > \lambda \Phi(v_1) + (1-\lambda) \Phi(v_2)$;

e. C est un sous-ensemble fermé de E, et que C est un cône convexe, c'est-à-dire :

$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2 \quad \forall (v_1, v_2) \in C^2 \quad (\alpha v_1 + \beta v_2) \in C$.

2° On fait désormais l'hypothèse suivante :

$$(B) \qquad \exists M > 0 / \forall x \in I \quad \sup_{y \in R} F(x, y) = \max_{|y| \leqslant M} F(x, y) .$$

Montrer que :

a. Pour tout $x \in I$, l'application partielle $y \longrightarrow F(x, y)$ admet un maximum unique.

Ce maximum est atteint en un point y noté $v_0(x)$.

b. L'application de I dans $\mathbb{R}$, $x \longrightarrow v_0(x)$ est continue sur I. (On pourra utiliser, après l'avoir démontré, le résultat suivant :

Soit (X, d) un espace métrique compact, $(x_n)_{n \in N}$ une suite de X. Alors la suite $(x_n)_{n \in N}$ est convergente si et seulement si elle n'a qu'une valeur d'adhérence.)

c. Φ admet un maximum unique sur E, atteint pour $v = v_0$.

3° On se restreint désormais à l'ensemble C.

Montrer que :

a. $\sup_{v \in C} \Phi(v) < + \infty$.

b. $\sup_{v \in C} \Phi(v) = \sup_{v \in C_M} \Phi(v)$

où : $C_M = \{ v / v \in C, \quad \forall x \in I \ |v(x)| \leqslant M \}$

c. La borne supérieure est atteinte en, au plus, un élément $v^* \in C$ (on ne cherchera pas à démontrer que cette borne supérieure est atteinte).

4° On postule l'existence d'une suite $(v_n)_{n \in N}$ d'éléments de C_M qui converge simplement vers une fonction $\bar{v} \in E$, et qui est telle que :

$$\lim_{n \to +\infty} \Phi(v_n) = \sup_{v \in C} \Phi(v)$$

Tournez la page S. V. P.

Montrer que :

a. v_n converge uniformément vers $\bar{v}$;

b. $\bar{v}$ appartient à C ;

c. $\bar{v}$ est le maximum de Φ sur C, c'est-à-dire :

$$\bar{v} = v^* .$$

II

On fait désormais l'hypothèse que F est dérivable par rapport à y et que la dérivée partielle $(x, y) \longrightarrow \dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y)$ est continue sur $I \times \mathbb{R}$.

On supposera que : $\sup_{v \in C} \Phi(v)$ est atteint en $v^* \in C$.

Le but de cette partie est de trouver des conditions nécessaires que doit satisfaire la fonction v^*.

1° En utilisant la concavité de F par rapport à v, montrer que :

$$\forall x \in I \quad \forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \quad F(x, y_1) - F(x, y_2) \leqslant \frac{\partial F}{\partial y}(x, y_2)(y_1 - y_2).$$

2° En déduire que $x \longrightarrow v_0(x)$ est caractérisé par la condition :

$$\forall x \in I \left\{ y = v_0(x) \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0 \right\}$$

3° Pour h élément quelconque de C et $t \in \mathbb{R}$ on pose :

$$\varphi(t) = \Phi(v^* + t h) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, v^*(x) + t h(x))\, dx.$$

a. Montrer que si φ est dérivable, sa dérivée en $t = 0$ ne peut être que négative ou nulle.

b. En déduire que : $\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y}(x, v^*(x))\, h(x)\, dx \leqslant 0.$

c. En prenant $h(x) \equiv 1$, montrer que :

(3) $$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y}(x, v^*(x))\, dx = 0.$$

4° Soit $\bar{x}$ un point quelconque de I et $\varepsilon > 0$.

On pose :
$$\begin{cases} h_\varepsilon(x) = 0 & \text{si } x \leqslant \bar{x} \\ \quad = \dfrac{1}{\varepsilon}(x - \bar{x}) & \text{si } \bar{x} < x < \bar{x} + \varepsilon \\ \quad = 1 & \text{si } x \geqslant \bar{x} + \varepsilon. \end{cases}$$

Déduire de la question 3° *b* la propriété suivante :

(4) $$\forall \bar{x} \in [x_0, x_1] \int_{\bar{x}}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y}(x, v^*(x))\, dx \leqslant 0$$

5° On pose, pour $t \in \mathbb{R}$: $\psi(t) = \Phi[(1 - t) v^*]$

En s'inspirant des raisonnements précédents prouver la relation :

(5) $$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y}(x, v^*(x))\, v^*(x)\, dx = 0.$$

III

On se propose de démontrer que les conditions nécessaires (3), (4), (5) établies dans la deuxième partie sont aussi suffisantes pour que v^* réalise le maximum de Φ sur C. Pour cela, on a besoin d'un résultat d'approximation que l'on démontrera dans la partie III. A, résultat que l'on utilisera dans la partie III. B pour démontrer que les conditions (3), (4), (5) sont suffisantes.

A.1° On définit une fonction ρ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, en posant :

$$\begin{cases} \rho(t) = 1 - 3t^2 + 2|t|^3 & \text{si } |t| \leqslant 1 \\ \quad = 0 & \text{si } |t| > 1. \end{cases}$$

Montrer que :

a. ρ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$;

b. ρ est à valeurs positives,

c. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(t)\, dt = 1.$

A.2° Pour tout $v \in E$, $\varepsilon > 0$ et $x \in I$, on pose :

$$v_\varepsilon(x) = \int_{-1}^{1} \rho(s)\, \tilde{v}(x - \varepsilon s)\, ds$$

Tournez la page S. V. P.

où : $\tilde{v}$ est défini par :

$$\begin{cases} \tilde{v}(t) = v(x_0) & \text{si } t < x_0 \\ \quad = v(t) & \text{si } t \in I \\ \quad = v(x_1) & \text{si } t > x_1 \end{cases}$$

Montrer que :

a. Si $v \in C$ alors $v_\varepsilon \in C$;

b. Quand $\varepsilon \to 0$, v_ε tend vers v, uniformément sur I;

c. $\forall x \in I \quad v_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho\left(\frac{x-t}{\varepsilon}\right) \tilde{v}(t)\, dt$;

d. v_ε est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intérieur de I.

A.3° En déduire que l'ensemble C_1, défini par :

$C_1 = \{ v \in C / v$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intérieur de I $\}$, est dense dans C.

B. On considère maintenant $v^* \in C$ qui vérifie les conditions (3), (4), (5). On va montrer que :

$$\Phi(v^*) = \sup_{v \in C} \Phi(v)$$

B.1° En utilisant le résultat de la question II.1, établir que :

(6) $\quad \forall v \in E \qquad \Phi(v) - \Phi(v^*) \leqslant \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y}(x, v^*(x))\,(v(x) - v^*(x))\, dx$

B.2° En intégrant par parties (après simplification) le second membre de (6), déduire des conditions (3), (4), (5) que :

$$\forall v \in C_1 \qquad \Phi(v) - \Phi(v^*) \leqslant 0$$

B.3° En déduire que : $\qquad \Phi(v^*) = \sup_{v \in C} \Phi(v)$

IV

On se propose de montrer l'existence de v^* et de le calculer explicitement dans le cas particulier suivant :

$$F(x, y) = y \cos x - \frac{1}{2} y^2, \text{ avec } I = [0, 2\pi].$$

1° Soit $v^* \in C$ un candidat à la maximisation de Φ sur C. On pose, pour $x \in I$:

$$V^*(x) = \int_0^x v^*(t)\, dt$$

a. On suppose dans un premier temps que v^* est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intérieur de I. Montrer que l'ensemble des conditions (3), (4), (5) équivaut à l'ensemble des trois conditions suivantes :

(3)′ $\qquad V^*(2\pi) = 0$

(4)′ $\qquad \forall x \in [0, 2\pi] \qquad V^*(x) \leqslant \sin x$

(5)′ $\qquad \int_0^{2\pi} (V^*(x) - \sin x) \frac{dv^*}{dx}(x)\, dx = 0$

b. On suppose désormais que v^* est seulement de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. De plus, on adopte la convention suivante : en tout point x de $]0, 2\pi[$ où v^* n'est pas dérivable, on pose :

$$\frac{dv^*}{dx}(x) = 0.$$

Montrer que l'équivalence démontrée en *a.* reste valable.

2° Soit : $\qquad I_1 = \left\{ x \in I / \frac{dv^*}{dx}(x) > 0 \right\}$

Montrer que : *a.* I_1 est un ouvert de I,

b. $\forall x \in I_1, \quad V^*(x) = \sin x$,

c. $\exists \alpha \in [\pi, 2\pi] / I_1 =]\alpha, 2\pi]$.

3° *a.* Montrer que v^* est constante sur $[0, \alpha]$.

b. En déduire que v^* est nécessairement telle que :

$$\begin{cases} v^*(x) = \frac{\sin \alpha}{\alpha} & \text{pour } x \in [0, \alpha] \\ \quad = \cos x & \text{pour } x \in]\alpha, 2\pi], \end{cases}$$

où α est l'unique solution, sur $[\pi, 2\pi]$, de l'équation : $\tan \alpha = \alpha$.

c. Montrer que le v^* ainsi défini permet bien d'atteindre le maximum de Φ sur C.

Page 96 1986 École Nationale de l'administration économique .Math 2